

Détermination de la matrice de rigidité d'un matériau en petites déformations planes à partir du flot optique

Ludovic Magerand¹ Adrien Bartoli¹ Michel Grédiac² Jean-Marc Thiesse^{1,2}

¹LASMEA – ²LAMI
Clermont-Ferrand

Résumé

Cet article ouvre une perspective de régularisation du calcul de flot optique par des contraintes ayant un sens mécanique. Nous réalisons une étude préliminaire sur la détermination de la matrice de rigidité qui met en relation contraintes et déformations. Cette matrice, issue de la Théorie de l'Élasticité, modélise le comportement des matériaux élastiques en petites déformations. Dans le cas d'un problème plan, nous l'adaptions au domaine de la Vision par Ordinateur. À partir d'un flot optique calculé à l'aide de «Free-Form Deformations», nous proposons une méthode de détermination de la matrice de rigidité à une constante près.

Introduction

Le calcul du flot optique est un problème classique en Vision par Ordinateur et qui se trouve être mal posé. Il est souvent régularisé par des méthodes *ad hoc*, comme celles proposées dans [5] ou [6]. Des travaux ont été réalisés pour régulariser ce problème à l'aide de contraintes ayant un sens physique, par exemple celle présentée dans [1].

Il est aussi possible d'extraire des lois de comportement des matériaux pour la régularisation du flot optique à partir de la Théorie de l'Élasticité [7]. Pour cela, il est nécessaire d'établir un lien avec le domaine de la Vision par Ordinateur. Ce lien est le flot optique qui est, lorsque la caméra est fronto-parallèle au plan de déformation, proportionnel au champ de déplacement. Ainsi en se limitant aux problèmes plans, la matrice de rigidité peut être déterminée à une constante près à partir d'images sous déformation.

Dans un premier temps, il est nécessaire de réaliser une étude préliminaire sur la détermination des coefficients utilisés par cette loi. Pour cela, une approche simple est d'introduire le flot optique dans les équations résultantes de la condition d'équilibre et de résoudre le système linéaire qui en découle.

Plan. Dans la section 1 des notions indispensables sur la Théorie de l'Élasticité seront données. Ensuite le lien entre

ce domaine et la Vision par Ordinateur sera développé dans la section 2 à travers le flot optique. La méthode de détermination de la matrice de rigidité fera l'objet de la section 3. Finalement la section 4 présentera quelques résultats expérimentaux.

Notations. Les scalaires et indices sont notés en italique (*c*). Les vecteurs sont des matrices colonnes notés en gras (\mathbf{V}), les autres matrices étant notées en caractères droits (M). La transposée d'une matrice M est notée M^T . Le vecteur nul est noté $\mathbf{0}$. Le gradient d'une fonction f d'un vecteur \mathbf{V} est noté $\nabla f(\mathbf{V})$. La divergence d'un tenseur T est notée $\text{div } T$.

1 Notions de Théorie de l'Élasticité

La Théorie de l'Élasticité est une branche de la Mécanique qui étudie, entre autres, les petites déformations des solides. Les concepts généraux de cette discipline sont présentés dans [9], par exemple.

1.1 Les constantes d'élasticité

Dans l'hypothèse des petites déformations, les constantes d'élasticité d'un matériau, qui sont quelques unes des constantes mécaniques utilisées pour modéliser son comportement, sont :

- Le *module d'Young* E (en $\frac{N}{m^2}$ ou Pa) qui rend compte de la proportionnalité entre les contraintes selon une direction donnée et sa déformation suivant cette même direction.
- Le *coefficient de Poisson* ν (sans unité) qui reflète au signe près la proportionnalité entre la déformation selon une direction donnée et la déformation induite suivant une direction orthogonale.
- Le *module de cisaillement* G (en Pa) qui modélise le comportement en cisaillement.

Selon la nature du matériau considéré, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes nécessaire pour décrire le comportement varie.

1.2 Les champs de déplacement et de déformation

Le champ de déplacement des points d'un matériau en cours de déformation est défini pour tout point initialement en \mathbf{M} et se déplaçant en \mathbf{M}' , par le vecteur

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}' - \mathbf{M} = \begin{pmatrix} u_x(\mathbf{M}) \\ u_y(\mathbf{M}) \end{pmatrix}.$$

Pour modéliser les déformations d'un matériau il faut utiliser le champ de déformation représenté en tout point par un tenseur de rang deux calculé, dans le cas des petites déformations, à partir du gradient du champ de déplacement

$$\epsilon(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{M}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{M})^\top),$$

qui est symétrique par définition. Il peut donc être paramétré en utilisant la notation de Voigt

$$\epsilon(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x(\mathbf{M})}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y(\mathbf{M})}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x(\mathbf{M})}{\partial y} + \frac{\partial u_y(\mathbf{M})}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

1.3 La condition d'équilibre

Le champ de contrainte modélise les forces internes, relatives à leur zone d'application, apparaissant en tout point d'un matériau. Il est donné en tout point par le tenseur des contraintes dit de Cauchy

$$\Sigma(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}.$$

En tout point non soumis à des forces extérieures directes, la condition d'équilibre [9] s'exprime sous la forme

$$\text{div } \Sigma(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

L'équilibre implique la propriété $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, le tenseur $\Sigma(\mathbf{M})$ est alors symétrique et peut donc être paramétré avec la notation de Voigt

$$\sigma(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}.$$

1.4 La matrice de rigidité

La *matrice de rigidité* est utilisée dans le cadre des petites déformations élastiques, linéaires et réversibles. Voir [7] pour une explication détaillée. Elle relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes et s'exprime, pour un problème plan et sous sa forme la plus générale, de la façon suivante

$$\sigma(\mathbf{M}) = \underbrace{\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & 0 \\ q_{2,1} & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{3,3} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} \epsilon(\mathbf{M}), \quad (2)$$

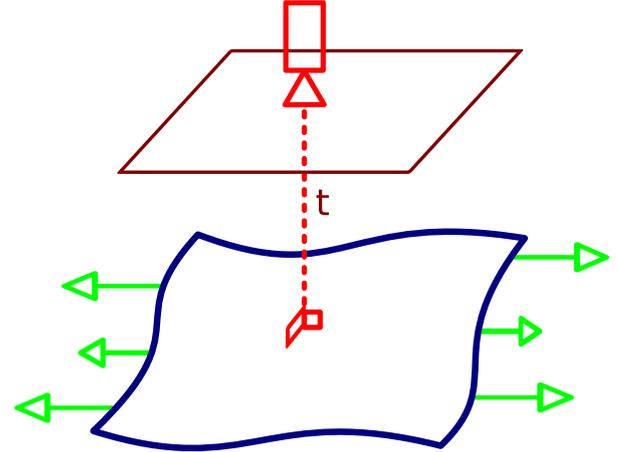


FIGURE 1 – Placement de la caméra.

où $q_{1,2} = q_{2,1}$.

La matrice de rigidité, notée ici \mathbf{Q} , est formée à partir des constantes d'élasticité vues section 1.1. Pour une description des relations entre ces constantes et la matrice de rigidité, se reporter à [3].

1.5 Le cas des matériaux isotropes

Un matériau isotrope est un matériau dont le comportement mécanique est identique dans toutes les directions. Leur modélisation n'utilise que deux des constantes d'élasticité pour former la matrice de rigidité : E et ν .

La matrice de rigidité \mathbf{Q} présentée équation (2) ne contient donc que deux coefficients indépendants

$$\begin{cases} q_{1,1} = q_{2,2} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ q_{1,2} = q_{2,1} = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \\ q_{3,3} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{cases}$$

où il faut remarquer que $q_{3,3} = \frac{1}{2}(q_{1,1} - q_{1,2})$.

2 Lien avec la Vision par Ordinateur

Afin de pouvoir utiliser en Vision par Ordinateur les notions vues en section 1, il faut réaliser un lien entre ces deux domaines. Sous certaines conditions, celui-ci peut se faire par le flot optique.

2.1 Flot optique et champ de déplacement

Afin de calculer les coefficients de la matrice de rigidité, le champ de déplacement sera considéré proportionnel au flot optique. Pour que cela soit vérifié, il faut poser quelques hypothèses sur le système d'acquisition :

- La caméra est fronto-parallèle au plan de déformation, comme illustré en figure 1 ;
- Les pixels de la caméra sont carrés ;

- Les paramètres de la caméra sont inchangés tout au long de la vidéo.

Sous ces hypothèses et en alignant le repère monde avec le repère caméra, la projection de tout point \mathbf{M} du plan de déformation, de coordonnées $(x \ y \ t)^\top$, où t est la distance au plan image de la caméra, est réalisée par la matrice des paramètres internes [4]

$$\begin{pmatrix} f & 0 & u_0 \\ 0 & f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où f est la distance focale (en pixels) de la caméra et $(u_0 \ v_0)^\top$ les coordonnées du point principal. Le point \mathbf{M} est alors projeté sur le plan image en

$$\begin{pmatrix} \frac{f}{t}x + u_0 \\ \frac{f}{t}y + v_0 \end{pmatrix}.$$

Le rapport $\frac{f}{t}$ est constant pour tout le plan et dans toute la vidéo, ce qui rend le flot optique proportionnel au champ de déplacement. Celui-ci étant calculé par rapport à une image de référence, la translation de vecteur $(u_0 \ v_0)^\top$ n'est pas problématique.

2.2 Le calcul du flot optique

Le calcul du flot optique que nous utilisons pour déterminer la matrice de rigidité est basé sur les «Free-Form Deformations», comme présenté dans [8]. Les «Free-Form Deformations» permettent la déformation d'une image de manière indirecte en l'incluant dans une grille de points de contrôle de B-Splines. Pour calculer le flot optique entre deux images, les points de contrôle de la grille sur l'image cible sont optimisés de sorte que cette image soit déformée pour être la plus proche possible de l'image de référence.

Cette méthode de calcul est globale car l'ensemble de l'image est utilisé pour optimiser les points de contrôle. De plus, elle permet de déterminer le flot optique d'une scène non-rigide. Un exemple de flot optique calculé par cette méthode est présenté en figure 2.

3 Algorithme

Dans le cas général il est possible de déterminer la matrice de rigidité du matériau à partir du flot optique calculé à l'aide de «Free-Form Deformations». Une attention particulière doit être portée au cas des matériaux isotropes en raison du nombre plus faible de coefficients indépendants dans leur matrice de rigidité.

3.1 Le cas général

En introduisant l'équation (2) dans la condition d'équilibre donnée équation (1), il résulte

$$\begin{cases} q_{1,1} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + q_{1,2} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + q_{3,3} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} = 0 \\ q_{2,2} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + q_{1,2} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + q_{3,3} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Après réécriture et en utilisant une notation matricielle, cela donne

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} & \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \end{pmatrix}}_{A(\mathbf{M})} \begin{pmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,2} \\ q_{3,3} \\ q_{1,2} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Cette équation matricielle est définie en tout point du matériau où le champ de déplacement, assimilé ici au flot optique, est suffisamment dérivable. Elle permet de retrouver les coefficients de la matrice de rigidité. Pour cela il faut utiliser une image de référence du matériau non déformé et au moins une image sous déformation. L'algorithme 1 donne la méthode générale de résolution.

Algorithme 1 : Détermination de la matrice de rigidité

- 1 **pour** chaque image faire
 - 2 Calculer le flot optique avec l'image de référence ;
 - 3 Calculer le champ de déformation et ses dérivés partielles ;
 - 4 **pour** chaque point du flot optique faire
 - 5 Former la matrice $A(\mathbf{M})$;
 - 6 L'empiler avec les précédentes ;
 - 7 Résoudre le système linéaire résultant au sens des moindres carrés ;
 - 8 Former la matrice de rigidité à l'échelle à partir de la solution obtenue ;
-

La résolution de la ligne 7 peut être effectuée de façon efficace par une décomposition en valeurs singulières, en utilisant une technique semblable à celle présentée dans [2]. Afin d'éviter la solution triviale consistant à prendre le vecteur nul, le vecteur inconnu est contraint à être unitaire. Par conséquent la matrice de rigidité calculée est obtenue à une constante multiplicative près.

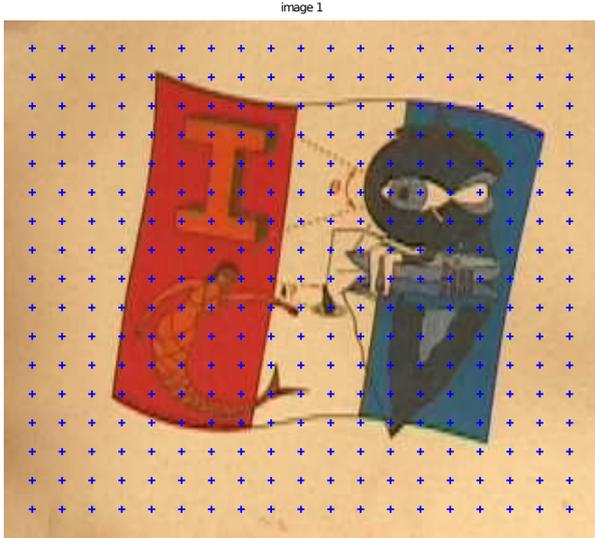
En notant $\mathbf{B}^\top = (A^\top(\mathbf{M}_1) \ \dots \ A^\top(\mathbf{M}_n))$, la décomposition en valeurs singulières donne $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\top$. La solution est obtenue en prenant la colonne de \mathbf{V} correspondant à la plus petite valeur singulière contenue dans \mathbf{S} .

3.2 Le cas des matériaux isotropes

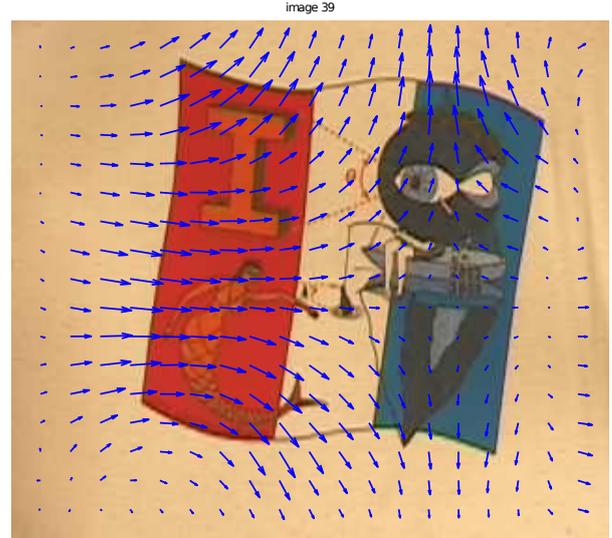
Comme vu en section 1.5, les matériaux isotropes forment un cas particulier. Leur matrice de rigidité ne s'exprime en effet qu'avec deux coefficients indépendants.

Il est important de prendre en compte ce cas particulier car le problème est alors de rang deux et non plus quatre comme présenté en section 3.1.

L'algorithme 1 est toujours utilisable pour déterminer la matrice de rigidité, néanmoins il faut remplacer la matrice $A(\mathbf{M})$. En effet, pour ces matériaux l'équation matricielle



(a) Image de référence et points de contrôle.



(b) Image cible et flot optique correspondant.

FIGURE 2 – Exemple de flot optique calculé par «Free-Form Deformation».

(3) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} \end{pmatrix}}_{A(M)} \begin{pmatrix} q_{1,1} \\ q_{1,2} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

La matrice de rigidité ainsi calculée est toujours obtenue à une constante multiplicative près.

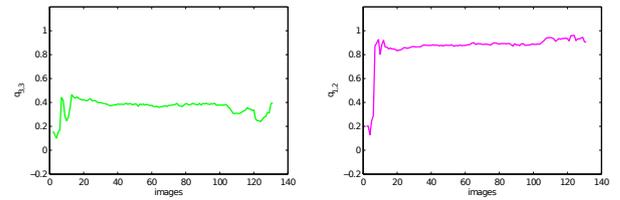
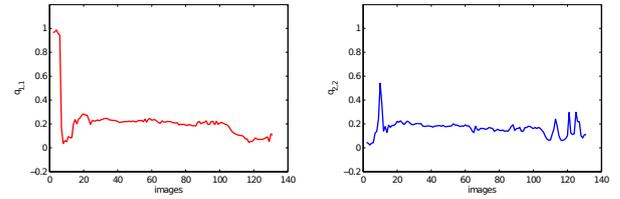
4 Résultats expérimentaux

L'algorithme présenté section 3.1 a été testé sur deux matériaux différents : un tee-shirt et une bande élastique. Chacun a été déformé par traction et filmé selon les hypothèses de la section 2.1. Une deuxième séquence du tee-shirt, en cisaillement, a aussi été testée afin de valider la méthode.

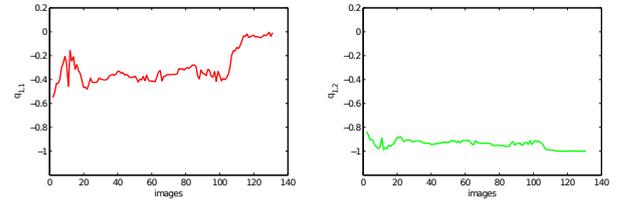
4.1 La séquence du tee-shirt

L'image 39 de la séquence de déformation du tee-shirt est montré en figure 2, ainsi que le flot optique correspondant. Les résultats obtenus sur cette séquence dans le cas général sont présentés en figure 3(a) sous la forme des courbes des coefficients de la matrice de rigidité tout au long de la déformation. En se plaçant dans le cas isotrope la figure 3(b) donne les résultats obtenus.

Le tableau 1 synthétise ces résultats sous la forme des moyennes et écarts-type des coefficients dans la partie exploitable de la séquence. Il faut en effet noter que sur le début et la fin de la séquence, quelques images ne présentent pas réellement de déformation mais plutôt un mouvement quasi-rigide. Pour cette raison les valeurs obtenues ne sont pas valides sur ces deux parties d'une vingtaine d'images.

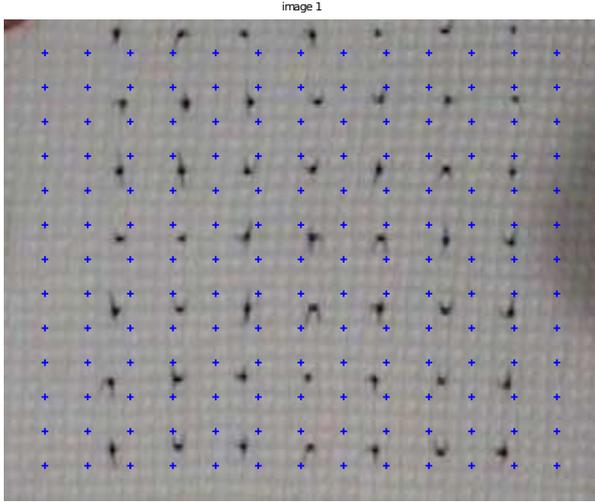


(a) Dans le cas général.

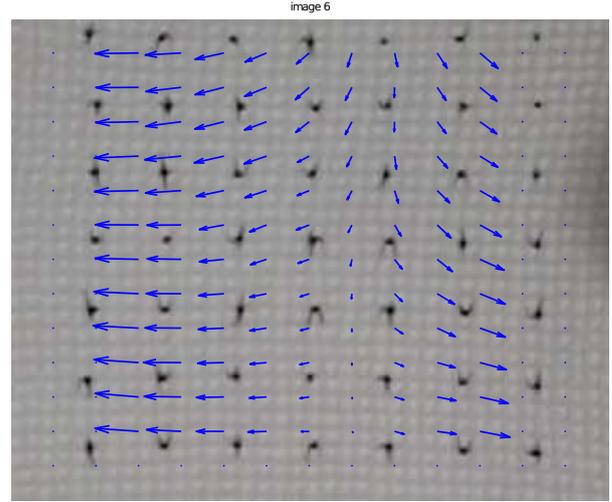


(b) Dans le cas isotrope.

FIGURE 3 – Évolution des coefficients de la matrice de rigidité pour la séquence du Tee-Shirt.



(a) Image de référence et points de contrôle.



(b) Image cible et flot optique correspondant.

FIGURE 4 – Flot optique du deuxième matériau testé.

	Cas Général		Cas Isotrope	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
$q_{1,1}$	0.2123	0.0299	-0.3579	0.0639
$q_{1,2}$	0.8827	0.0191	-0.9313	0.0214
$q_{2,2}$	0.1697	0.0306	—	—
$q_{3,3}$	0.3800	0.0219	—	—

TABLE 1 – Moyenne et écart-type des coefficients de la matrice de rigidité pour la séquence du Tee-Shirt.

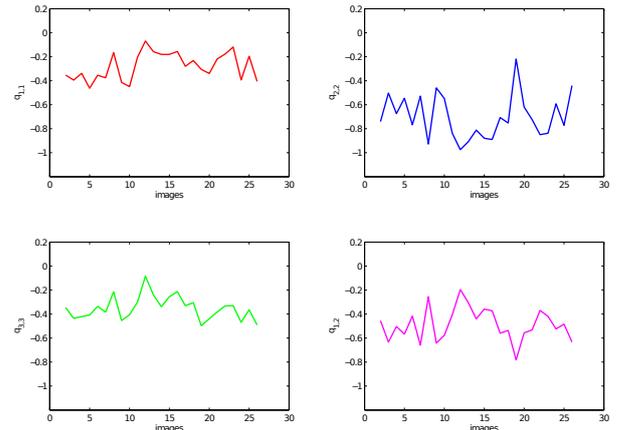
	Cas Général		Cas Isotrope	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
$q_{1,1}$	-0.2672	0.1160	-0.8720	0.0628
$q_{1,2}$	-0.4802	0.1548	-0.4731	0.1134
$q_{2,2}$	-0.7117	0.2013	—	—
$q_{3,3}$	-0.3285	0.1048	—	—

TABLE 2 – Moyenne et écart-type des coefficients de la matrice de rigidité pour la séquence de la bande.

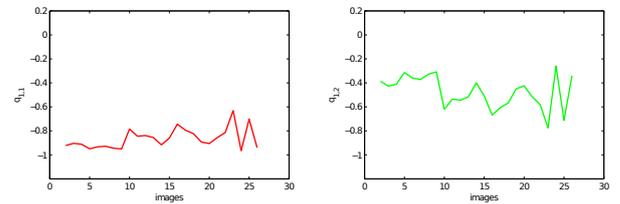
4.2 La séquence de la bande

Le deuxième matériau utilisé pour réaliser les tests est une bande de maintien élastique. Ce matériau est plus proche du cas général car il semble avoir deux axes de symétrie de comportement mécanique. Il est présenté sur la figure 4 qui montre l'image de référence et l'image 6 avec son flot optique.

Dans le cas général, les résultats pour ce matériau sont présentés en figure 5(a). La figure 5(b) présente les résultats dans le cas isotrope. Les moyennes et écarts-type des différents coefficients sont donnés dans le tableau 2. Pour cette séquence cinq images ont dû être écartées au début et à la fin.



(a) Dans le cas général.



(b) Dans le cas isotrope.

FIGURE 5 – Évolution des coefficients de la matrice de rigidité pour la séquence de la bande.

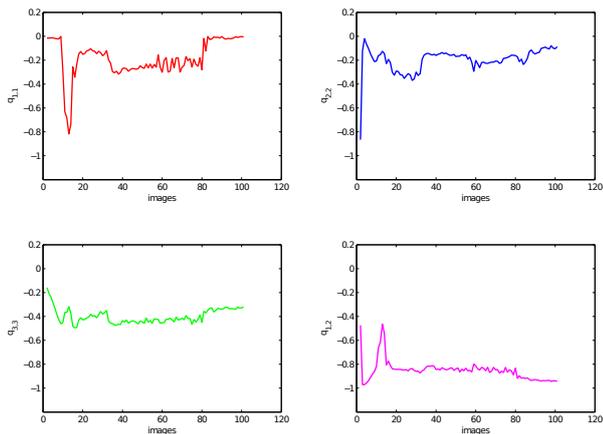


FIGURE 6 – Évolution des coefficients de la matrice de rigidité pour la séquence de cisaillement dans le cas général.

	Cas Général		Cas Isotrope	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
$q_{1,1}$	-0.2206	0.0664	-0.3195	0.1012
$q_{1,2}$	-0.8450	0.0194	-0.9415	0.0380
$q_{2,2}$	-0.2119	0.0673	–	–
$q_{3,3}$	-0.4272	0.0293	–	–

TABLE 3 – Moyenne et écart-type des coefficients de la matrice de rigidité pour la séquence de cisaillement.

4.3 La séquence de cisaillement

La deuxième séquence du tee-shirt a été réalisée afin de tester le comportement sur une déformation se rapprochant d'avantage du cisaillement. La figure 6 présente les résultats obtenus dans le cas général. Le tableau 3 synthétise ces résultats après retrait des vingt images de début et fin de séquence.

4.4 Analyse des résultats

En premier lieu, étant donné que la matrice de rigidité est calculée image par image, les courbes représentant les coefficients en fonction des images doivent donner des droites horizontales. Dans le cas des deux séquences du tee-shirt, en mettant de côté le début et la fin de la séquence, cette situation est bien vérifiée. Pour la séquence de la bande, cela est moins évident car les résultats sont davantage bruités.

Un autre résultat intéressant est donné par la comparaison des valeurs obtenues sur les deux séquences du tee-shirt. En effet celles-ci sont très proches, au signe près, dans les deux cas, ce qui correspond bien au résultat attendu.

En revanche il faut observer que les ordres de grandeurs entre coefficients ne sont pas parfaitement respectés. Par exemple $q_{3,3}$ devrait être inférieur à $q_{1,1}$ en valeur absolue. Ceci est sans-doute dû aux imprécisions sur les dérivées secondes ou à l'hypothèse des petites déformations qui n'est pas vraiment respectée.

Conclusion

La Théorie de l'Élasticité offrent des contraintes ayant une réalité physique sur les déformations qu'un matériau peut subir. Certaines de ces contraintes sont transposables à la Vision par Ordinateur au travers du flot optique.

Dans le cadre d'un problème plan et pour un matériau en petites déformations, nous avons montré comment adapter la loi de comportement correspondante. Une méthode pour déterminer la matrice de rigidité qui intervient dans cette loi a été développée et testée. Les premiers résultats ainsi obtenus sont encourageants et invitent à poursuivre ce travail.

En effet, une fois la matrice de rigidité d'un matériau déterminée, il est envisageable d'utiliser la condition d'équilibre comme contrainte afin de régulariser le calcul du flot optique. Il serait néanmoins intéressant de pouvoir supprimer cette étape préalable et de réaliser le calcul du flot optique en même temps que la détermination de la matrice de rigidité.

Plusieurs extensions de cette méthode sont possibles et des études restent à mener. Il est par exemple envisageable d'utiliser d'autres lois de comportement ou de passer au domaine tridimensionnel. Une réflexion particulière serait aussi à mener en dehors du cadre des petites déformations, hypothèse trop restrictive et souvent non vérifiée.

Références

- [1] T. Corpetti, E. Mémin, A. Santa-Cruz, D. Heitz, and G. Arroyo. Optical flow estimation in experimental fluid mechanics. In *ISSPA'03*, 2003.
- [2] G. Golub and C. Reinsch. Singular value decomposition and least squares solutions. *Numerische Mathematik*, 14(5) :403–420, 1970.
- [3] H. T. Hahn and S. W. Tsai. *Introduction to Composite Materials*. 1980.
- [4] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2004.
- [5] B. K. P. Horn and B. G. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17 :185–203, 1981.
- [6] B. D. Lucas and T. Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. In *IJCAI'81*, pages 674–679, 1981.
- [7] J. Mwanje. An approach to Hooke's law. *Physics Education*, 15(2) :104–105, 1980.
- [8] D. Rueckert, L. Sonoda, C. Hayes, D. Hill, M. Leach, and D. Hawkes. Nonrigid registration using free-form deformations : application to breast mr images. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 18(8) :712–721, 1999.
- [9] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus - Tome 1 : Concepts généraux*. 2005.